ВОЗМУЩЕНИЯ СКОРОСТЕЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ЗОНЕ ОТСТАВАНИЯПРИ ПРОКАТКЕ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЫ

THE VELOCITY DISTURBANCES IN THE LAG ZONE DURING ROLLING OF THE VISCOPLASTIC BAND

В.Д. Соловей
Институт машиноведения УрО РАН, 620219 Екатеринбург,
e-mail: SoloveiVD@yandex.ru

Abstract

The small disturbances of the isothermal slow plane special stationary flow of the viscoplastic band during rolling are considered. It is demonstrated that disturbances of velocities in the lag zone on the roll contact surface are alternating wave functions of coordinates.

Системы уравнений для основного течения и для возмущений основного течения вязкопластического тела. Граничные условия для процесса прокатки. Будем рассматривать плоское медленное течение вязкопластического тела, для которого уравнения движения имеют следующий вид [1,2]:

$$\rho\ v_{i,t} = \sigma_{ij,j}\,. \tag{1}$$

Здесь v_i-компоненты вектора скорости перемещения частиц; σ_{ij}-компоненты тензора напряжений; ρ-плотность тела $(\rho = const)$; тензорные индексы принимают значения прямоугольных декартовых координат x, y; по дважды повторяющимся тензорным индексам i, j, k, l происходит суммирование по всем возможным их значениям; запятая перед индексом обозначает частную производную по соответствующей координате или по времени.

Система уравнений для основного стационарного течения вязкопластического тела имеет вид [3,4,5]:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \tag{2}$$

$$v_{i,i} = 0, \tag{3}$$

$$s_{ij} = s'_{ij} + s''_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + 2K\varepsilon_{ij}/H\,, \tag{4}$$

$$\varepsilon_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2\,, \tag{5}$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}\,, \tag{6}$$

где ε_{ij} и s_{ij}-компоненты тензора скоростей деформаций и девиатора напряжений соответственно; s'_{ij} и s''_{ij}- компоненты вязкого и пластического девиатора напряжений соответственно; $\sigma = \sigma_{ii}/3$-гидростатическое давление; $H = \sqrt{2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}$-интенсивность скоростей деформации сдвига; K и μ -пластическая постоянная (предел текучести на сдвиг) и коэффициент вязкости материала соответственно ($K > 0,\ \mu > 0$); δ_{ij}-символ Кронекера.

Уравнения состояния (4) получены в предположении, что плотность диссипативной функции f, а также её вязкая и пластическая составляющие,

$$f = f' + f'' = \mu H^2/2 + KH, \tag{7}$$

являются вязкопластическим, вязким и пластическим потенциалами [3, 4]:

$$s_{ij} = \partial f/\partial\varepsilon_{ij}, \tag{8}$$

$$s'_{ij} = \partial f'/\partial\varepsilon_{ij}, \quad s''_{ij} = \partial f''/\partial\varepsilon_{ij}. \tag{9}$$

Напряжения на границе тела p_i определяются формулой Коши

$$p_i = \sigma_{ij}n_j. \tag{10}$$

Будем исследовать малые возмущения основного течения, которые описываются изохронными, изокоординатными вариациями переменных состояния $\delta v_i, \delta\varepsilon_{ij}, \delta\sigma_{ij}, \delta s_{ij}, \delta\sigma$, зависящими от координат и времени.

Система уравнений для возмущений основного течения вязкопластического тела имеет следующий вид:

$$\rho\delta v_{i,t} = \delta\sigma_{ij,j}, \tag{11}$$

$$\delta v_{i,i} = 0, \tag{12}$$

$$\delta s_{ij} = 2KH^{-3}\,(-2\varepsilon_{kl}\,\delta\varepsilon_{kl}\,\varepsilon_{ij} + H^2\delta\varepsilon_{ij}) + 4\mu\delta\varepsilon_{ij}, \tag{13}$$

$$\delta\varepsilon_{ij} = (\delta v_{i,\,j} + \delta v_{j,\,i})/2\,, \tag{14}$$

$$\delta s_{ij} = \delta\sigma_{ij} - \delta\sigma\delta_{ij}. \tag{15}$$

Уравнения (11)-(15) получаются варьированием уравнений (1), (3)-(6) с удержанием только первых вариаций. При этом операция варьирования коммутирует с операциями взятия частных производных по координатам и времени.

Возмущения напряжений на границе тела δp_i определяются формулой

$$\delta p_i = \delta\sigma_{ij} n_j. \tag{16}$$

На рис. 1 приведена схема процесса плоской прокатки полосы. Область

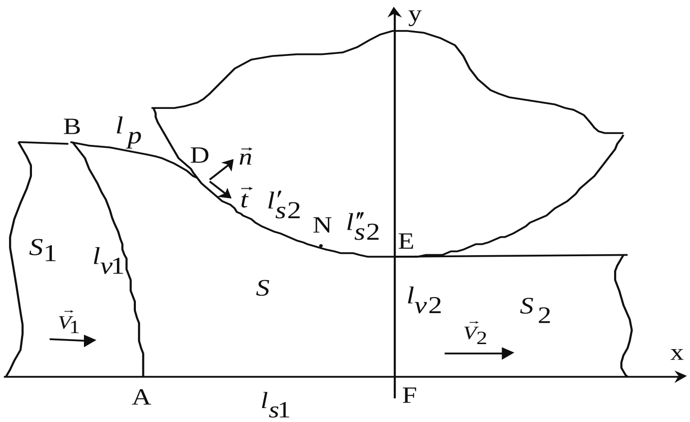

Рис. 1. Схема плоской прокатки полосы.

$ABDEF\,(S)$-область течения материала полосы. На границе контакта полосы с валком $DE\ (l_{s2})$ имеет место проскальзывание частиц полосы по поверхности валка. В нейтральной точке N касательные скорости перемещений частиц полосы и валка равны. Касательные составляющие скоростей перемещений частиц полосы v_t в зоне отставания $DN\ (l'_{s2})$ меньше, а в зоне опережения $NE\ (l''_{s2})$ -больше, окружной скорости валка. Задаваемые на границе l_{s2} напряжения трения p_t^* (рис. 2) являются активными в зоне отставания и пассивными в зоне опережения [6]. Справа и слева от области течения изображены передний (S_2) и задний (S_1) жесткие концы полосы. Границы контакта области течения с жесткими концами полосы S_2 и S_1 обозначены как $EF\ (l_{v2})$ и $AB\,(l_{v1})$ соответственно. Граница $BD\,(l_p)$ свободна от нагрузки, а граница $AF\ (l_{s1})$ представляет плоскость симметрии процесса прокатки.

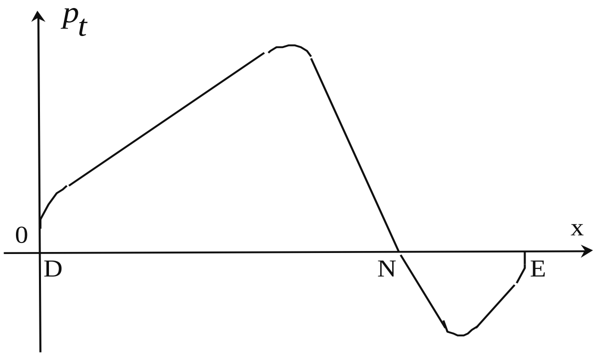

Рис 2. Типичная эпюра распределения касательных напряжений трения на границе контакта полосы с валком [6].

Граничные условия для основного течения и возмущений основного течения имеют следующий вид:

$$p_t = p_t^*, \quad v_n = 0 \text{ на } l_{s2}; \qquad (17)$$

$$v_x = V_1^*, \quad v_y = 0 \text{ на } l_{v1}; \qquad (18)$$

$$v_x = V_2^*, \quad v_y = 0 \text{ на } l_{v2}; \qquad (19)$$

$$p_t = 0, \quad p_n = 0 \text{ на } l_p; \qquad (20)$$

$$p_t = 0, \quad v_n = 0 \text{ на } l_{s1} \qquad (21)$$

и

$$\delta p_t = 0, \quad \delta v_n = 0 \text{ на } l_{s2}; \qquad (22)$$

$$\delta v_x = 0, \quad \delta v_y = 0 \text{ на } l_{v1}; \qquad (23)$$

$$\delta v_x = 0, \quad \delta v_y = 0 \text{ на } l_{v2}; \qquad (24)$$

$$\delta p_t = 0, \quad \delta p_n = 0 \text{ на } l_p; \qquad (25)$$

$$\delta p_t = 0, \quad \delta v_n = 0 \text{ на } l_{s1} \qquad (26)$$

соответственно. Индексы t и n обозначают компоненты векторов в локальной системе координат $\vec{t}, \vec{n}$; звёздочкой * обозначаются заданные величины. Первое граничное условие в (17) определяется из решения задачи основного течения, которое считается известным.

Приведем выражение для закона сохранения мощности деформирования:

$$W_a = W_p. \qquad (27)$$

Здесь мощности активных напряжений в зоне отставания W_a и пассивных напряжений в объеме и на всех границах с трением W_p имеют вид:

$$W_a = \int_{l'_{s2}} p_t^* v_t dl, \qquad (28)$$

$$W_p = \int_S w dS - \int_{l''_{s2}} p_t^* v_t dl - \int_{l_{v1}} p_t v_t^* dl - \int_{l_{v2}} p_t v_t^* dl, \qquad (29)$$

$$w = s_{ij}\varepsilon_{ij} = \mu H^2 + KH = f + f', \qquad (30)$$

где w-плотность мощности диссипации.

Особые стационарные течения вязкопластического тела. Выделим в тензоре напряжений вязкую и пластическую части:

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \sigma''_{ij}, \qquad (31)$$

где

$$\sigma'_{ij} = s'_{ij} + \sigma'\delta_{ij}, \ \sigma''_{ij} = s''_{ij} + \sigma''\delta_{ij}. \qquad (32)$$

Здесь σ'_{ij} и σ''_{ij}-вязкая и пластическая части тензора напряжений соответственно; σ' и σ'' - вязкая и пластическая части гидростатического давления. Величины, относящиеся квязкой и пластической частям тензора напряжений, отмечаются одним $'$ и двумя $''$ штрихами соответственно. Так напряжение на границе тела равно

$$p_i = p'_i + p''_i, \qquad (33)$$

где p'_i и p''_i - вязкая и пластическая части поверхностного напряжения соответственно.

В работе [7] дается определение особого стационарного течения вязкопластического тела как течения, для которого вязкие и пластические напряжения порознь удовлетворяют уравнениям равновесия, т. е.

$$\sigma'_{ij,j} = 0, \qquad (34)$$

$$\sigma''_{ij,j} = 0. \qquad (35)$$

Из (34), (35), (31), (32) и (4) выводятся следующие соотношения, при выполнении которых стационарное течение вязкопластического тела является особым стационарным течением:

$$2K(1/H)\varepsilon_{ij}H_{,j} + K\sigma'_{,i}/\mu - H\sigma''_{,i} = 0. \qquad (36)$$

Из (36) видно, что стационарные течения с однородными скоростями деформаций, а также вязкими и пластическими частями гидростатического давления, являются особыми стационарными течениями. Такие особые стационарные течения имеют место, например, в процессах растяжения и сжатия вязкопластических полос, рассмотренных в работе [8].

В качестве основного течения вязкопластического тела мы принимаем особое стационарное течение, поэтомувместо уравнений (2) будем использовать уравнения (34) и (35).

Возможные возмущения скоростей перемещений в зоне отставания для особых стационарных течений вязкопластической полосы при прокатке.

Сформулируем два граничных интегральных условия для возможных возмущений скоростей перемещений особых стационарных течений вязкопластической полосы.

Первое граничное интегральное условие получим, варьируя закон сохранения мощности (27):

$$\delta W_a = \delta W_p \cdot \qquad (37)$$

Первая вариация от члена в W_p, содержащего w, с учетом (30), (7), (8), (9), (6), (12), симметрии тензора напряжений, с использованием теоремы Гаусса—Остроградского, преобразуется к виду:

$$\delta\int_S w dS = -\int_S (\sigma_{ij,j} + \sigma'_{ij,j})\, dS + \oint_l (p_i + p'_i)\delta v_i dl \cdot (38)$$

Выражение (37) с учетом (28), (29), (38) а также (31), (34), (35), и граничных условий (17)-(26), дает для особого стационарного течения искомое интегральное граничное условие:

$$\int_{l_{s2}} p'_t \delta v_t dl + \int_{l_{s1}} p'_t \delta v_t dl + \int_{l_p} (p'_t \delta v_t + p'_n \delta v_n)\, dl = 0. \quad (39)$$

Отметим, что уравнение (39) существует только для вязкопластического тела, обладающего пластическими и вязкими свойствами. Для идеальнопластического тела это уравнение вырождается.

Второе граничное интегральное условие получим, используя принцип наименьшего производства энтропии Пригожина.

Рассмотрим сначала вторую вариацию мощности диссипации для произвольного течения вязкопластического тела $\delta^2 W_p$. Учитывая (30), (7), (8) и (9), получаем

$$\delta^2 w = (\delta s_{ij} + \delta s'_{ij})\,\delta\varepsilon_{ij}. \quad (40)$$

Имеет место соотношение

$$\delta s'_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij} = 2\mu\,\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \ge 0. \,(41)$$

Докажем неравенство

$$\delta s_{ij}\delta\varepsilon_{ij} \ge 0. \qquad (42)$$

Левую часть (42), учитывая выражения (13), можно представить в виде

$$\delta s_{ij}\delta\varepsilon_{ij} = 4KH^{-3}(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{kl}\delta\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}\delta\varepsilon_{kl}) + 4\mu\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{ij}. \quad (43)$$

Поскольку выражение в скобках, согласно неравенству Коши-Буняковского, неотрицательно, то из (43) следует (42).Из (29), (40), (42) и (41) следует неравенство

$$\delta^2 W_p \ge 0. \qquad (44)$$

Найдем первую вариацию мощности диссипации для особого стационарного течения вязкопластической полосы при прокатке δW_p .

Варьируя (29) и используя (38), граничные условия (17), (20), (21), (23), (24), а также соотношения (31), (32), (34), (35) и (39), получаем:

$$\delta W_p = \int_{l'_{s2}} p^*_t \delta v_t dl. \qquad (45)$$

Производство энтропии P связано с мощностью диссипации выражением [2]

$$P = W_p / T, \qquad (46)$$

где T -абсолютная температура.

Согласно теореме Пригожина о минимуме производства энтропии и выражению (46) для изотермического особого стационарного течения вязкопластической полосы при прокатке мощность диссипации должна быть минимальной. При этом необходимое условие минимальности мощности диссипации, учитывая соотношение (45), имеет следующий вид:

$$\int_{l'_{s2}} p^*_t \delta v_t dl = 0. \qquad (47)$$

Из выражения (47), учитывая характерное распределение касательных напряжений трения в зоне отставания (рис. 2), следует, что при прокатке вязкопластической полосы в указанной зоне в произвольный момент времени возмущения касательных составляющих скоростей перемещений должны описываться волновой знакопеременный функцией координат. Этот вывод справедлив и для случая прокатки идеально пластической полосы.

Сделанный здесь вывод согласуется с известными экспериментальными данными для сталей [9-12].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы президиума РАН № 15, проект № 12-П-1-1025.

Список литературы

1. Ламб Г. Гидродинамика. М. - Л.: ГИТТЛ, 1947.

2. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973.

3. Ильюшин А. А. Деформация вязкопластичного тела // Уч. зап. МГУ. Механика. М.: Изд-во МГУ. 1940. Вып. 39. С. 3-81.

4. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М.: ГИФМЛ, 1962.

5. Колмогоров В. Л. Механика обработки металлов давлением. М.: Металлургия, 1986.

6. Грудев А.П. Теория прокатки. М.: Металлургия, 1988.

7. Соловей В.Д.Устойчивость течения и теорема Пригожина для стационарного течения вязкопластического тела. // Инженерно-физический журнал. 2011. Том 84, № 6. С. 1293-1296.

8. Ишлинский А.Ю. Об устойчивости вязкопластического течения полосы и круглого прута // ПММ. 1943. Т.VII. С.109-130.

9. Губернаторов В.В., Соколов Б.К., Владимиров Л.Р., Сбитнев А.К., Гервасьева И.В. Новые аспекты течения металла в очаге деформации // Доклады академии наук. 1999. том.364, № 4. С. 468-470.

10. Губернаторов В.В., Соколов Б.К., Гервасьева И.В., Владимиров Л.Р. О формировании полосовых структур в структурно-однородных материалах при деформации // Физическаямезомеханика. 1999. Том. 2, № 1-2. С157-162.

11. Дреннов О.Б., Михайлов А.Л., Низовцев П.Н., Раевский В.А. Неустойчивость контактной границы слоев из стали при воздействии косой ударной волны // ПМТФ. 2003. Т. 44, №2. С. 3-13.

12. Дреннов О.Б., Михайлов А.Л., Низовцев П.Н., Раевский В.А. Развитие возмущений на границе раздела металлов при косом соударении со сверхзвуковой скоростью перемещения точки контакта // ЖТФ. 2003. Т. 73, вып. 8. С. 62-70.